### Лабораторная работа №10 «Нахождение кратчайших путей в графе. Решение задачи о максимальном потоке»

**Цель работы:** Решить задачу о нахождении кратчайших путей в графе. Решить задачу о нахождении максимального потока.

### Краткая теория

***Граф*** это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. *Вершины*, прилегающие к одному и тому же ребру, называются *смежными*. Если *ребра* ориентированы, что обычно показывают *стрелками*, то они называются *дугами*, и граф с такими ребрами называется ***ориентированным графом***. Если *ребра не имеют ориентации*, граф называется ***неориентированным***.

Графы обычно изображаются в виде геометрических фигур, так что вершины графа изображаются точками, а ребра - линиями, соединяющими точки (рис. 1).

*Петля* это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

*Простой граф* - граф без кратных ребер и петель.

*Степень вершины* это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.

*Пустым* называется граф без ребер. *Полным* называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

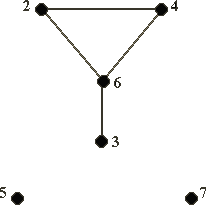


Рис. 1

***Путь*** в ориентированном графе — это последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

***Маршрут*** в графе путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

***Цепь*** маршрут, в котором все ребра попарно различны.

***Цикл*** замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Маршрут, в котором *все вершины попарно различны*, называют ***простой цепью***. Цикл, в котором *все вершины, кроме первой* и *последней*, *попарно различны*, называются ***простым циклом***.

***Подграф графа*** это граф, являющийся *подмоделью* исходного графа, т.е. подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые ребра (только те, оба конца которых входят в подграф).

Подграф называется ***остовным*** подграфом, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа.

Граф называется ***связным***, если любая пара его вершин связана. *Связными компонентами* графа называются подграфы данного графа, вершины которых связаны.

***Дерево*** — это связный граф без циклов. Деревья особенно часто возникают на практике при изображении различных иерархий. Например, популярны генеалогические деревья.

Граф без цикла называется ***лесом***. Вершины *степени 1* в дереве называются ***листьями***. ***Деревья*** - очень удобный инструмент представления информации самого разного вида. Деревья ***отличаются*** от простых графов тем, что ***при обходе дерева невозможны циклы***. Это делает графы очень удобной формой организации данных для различных алгоритмов.

Очевидно, что графический способ представления графов непригоден для ПК. Поэтому существуют другие способы представления графов.

В теории графов применяются

1. **Матрица инцидентности.** Это матрица ***А*** с ***n*** строками, соответствующими вершинам, и ***m*** столбцами, соответствующего рёбрам. Для ориентированного графа столбец,

соответствующий дуге ***(х,y)*** содержит - ***1*** в строке, соответствующей вершине ***х*** и ***1***, в строке, соответствующей вершине ***у***. Во всех остальных ***0***. Петлю, т.е. дугу ***(х,х)*** можно представлять иным значением в строке ***х***, например, ***2***. Если граф неориентированный, то столбец, соответствующий ребру ***(х,у)*** содержит ***1***, соответствующие ***х*** и ***у*** и нули во всех остальных строках.

1. **Матрица смежности**. Это матрица ***n×n*** где ***n*** - число вершин, где ***bij = 1***, если существует ребро, идущее из вершины х в вершину у и ***bij = 0*** в противном случае. **Нахождение минимального остова в графе**

***Алгоритм решения***

1. Упорядочить ребра графа по возрастанию весов;
2. Выбрать ребро с минимальным весом, не образующее цикл с ранее выбранными ребрами. Занести выбранное ребро в список ребер строящегося остова;
3. Проверить, все ли вершины графа вошли в построенный остов. Если нет, то выполнить пункт **2**.

### Нахождение кратчайшего пути в графе

Пусть дан граф, дугам которого приписаны веса. Задача о нахождении кратчайшего пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины до заданной конечной вершины, при условии, что такой путь существует.

Данная задача может быть разбита на две:

1. для начальной заданной вершины найти все кратчайшие пути от этой вершины к другим;
2. найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

***Рассмотрим алгоритм решения для задачи первого типа:***

Необходимо найти путь от ***s*** - начальной вершины до ***t*** - конечной вершины. Каждой вершине присваиваем пометки ***I(Xi)***.

1. ***I(s) = 0, I(Xi)*** равно бесконечности для всех ***Хi*** не равных s и считать эти пометки временными. Положить ***р = s***.
2. Для всех ***Хi***, принадлежащих ***Г(р)*** и пометки которых временны, изменить пометки по следующему правилу:

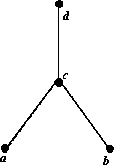
***I(Xi) = min[I(Xi), I(p) + c(p, Xi)]***

1. среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой ***I(Xi\*) = min[I(Xi)]***
2. считать пометку вершины ***Хi\**** постоянной и положить ***р = Хi\****.
3. если ***р = t***, то ***I(р)*** является длинной кратчайшего пути, если нет, перейти к шагу **2**.

Как только все пометки расставлены, кратчайшие пути получают, используя соотношение ***I(Xi') + c(Xi',Xi) = I(Xi) (1)***.

Для решения задачи второго типа можно применять данный алгоритм для каждой вершины.

### Порядок выполнения заданий

**Задача 1.** Составить матрицы инцидентности и смежности для графа:

### Решение.

Матрица инцидентности Матрица смежности

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***u*** | ***v*** | ***w*** |
| ***a*** | 1 | 0 | 0 |
| ***b*** | 0 | 0 | 1 |
| ***c*** | 1 | 1 | 1 |
| ***d*** | 0 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| ***a*** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| ***b*** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| ***c*** | 1 | 1 | 0 | 1 |
| ***d*** | 0 | 0 | 1 | 0 |

Где ***u, v, w*** – ребра данного графика

**Задача 2.** На представленном графе найдите: а) минимальный остов дерева, б) найдите кратчайший путь от начальной точки Х1 до всех остальных точек.

Х2 20 Х3

Х1 36

23

1

4

15

Х5 9 Х4

**Решение**. а) Найдем минимальный остов дерева представленного на рисунке. Составим таблицу значений расстояний между точками.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  | 23 |  |  | 36 |
| Х2 | 23 |  | 20 |  | 1 |
| Х3 |  | 20 |  | 15 | 4 |
| Х4 |  |  | 15 |  | 9 |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |

Для решения данной задачи достаточно рассмотреть или только левую или только правую часть от главной диагонали матрицы. Воспользуемся левой частью таблицы. А также изобразим исходный график без ребер, только с помощью одних вершин.

Х2 Х3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  |  |  |  |  |
| Х2 | 23 |  |  |  |  |
| Х3 |  | 20 |  |  |  |
| Х4 |  |  | 15 |  |  |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |

Х1 Х5 Х4

Из элементов матрицы выбираем минимальный - ***(Х2,Х5) = 1***. Обводим выбранный элемент кружком и указываем на рисунке соответствующее ребро.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  |  |  |  |  |
| Х2 | 23 |  |  |  |  |
| Х3 |  | 20 |  |  |  |
| Х4 |  |  | 15 |  |  |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |

Х2 Х3

Х1 Х5 Х4

Из оставшихся элементов выбираем минимальный - ***(Х3,Х5) = 4***. Элемент обводим кружком. Чтобы выполнялось условие **2** пункты **Х2** и **Х3** не должны соединяться, поэтому элемент ***(Х2,Х3)*** зачёркивается. И т.д.

Х2 Х3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  |  |  |  |  |
| Х2 | 23 |  |  |  |  |
| Х3 |  | 20 |  |  |  |
| Х4 |  |  | 15 |  |  |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |

В итоге получаем:

Х1 Х5 Х4

Х2 Х3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  |  |  |  |  |
| Х2 | 23 |  |  |  |  |
| Х3 |  | 20 |  |  |  |
| Х4 |  |  | 15 |  |  |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |



Х1 Х5 Х4

Длина минимального остова равна **(Х1,Х2)+(Х2,Х5)+(Х3,Х5)+(Х4,Х5)=23+1+4+9=37**

Б) Найдем кратчайший путь представленного графа от начальной точки Х1 до всех остальных точек.

Х2 20 Х3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 |
| Х1 |  | 23 |  |  | 36 |
| Х2 | 23 |  | 20 |  | 1 |
| Х3 |  | 20 |  | 15 | 4 |
| Х4 |  |  | 15 |  | 9 |
| Х5 | 36 | 1 | 4 | 9 |  |

Х1 36

23

1

4

15

Начальное расстояние I(X1)=0\*, I(Xi)=∞, Xi≠X1, p=X1.

Х5 9 Х4

Находим множество точек, соединяющиеся с точкой Х1:

Г{X1}={X2,X5}

Находим минимальное расстояние каждой из этих точек: I(X2)=min[∞,0\*+23]=23,

I(X5)=min[∞,0\*+36]=36,

min[I(X2), I(X3), I(X4), I(X5)]=min[23, 36, ∞, ∞]=23,

X2: I(X2)=23\*, p=23, рядом с точкой Х2 поставим расстояние 23.

Находим множество точек, соединяющиеся с точкой Х2, точку Х1 не трогаем, так как мы ее уже рассмотрели.

Г{X2}={X3,X5}

Находим минимальное расстояние каждой из этих точек: I(X3)=min[∞,23\*+20]=43,

I(X5)=min[36,23\*+1]=24,

min[I(X3), I(X4), I(X5)]=min[43,∞, 24]=24,

X5: I(X5)=24\*, p=24, рядом с точкой Х5 поставим расстояние 24. Аналогично находим все остальные расстояния до остальных точек: Г{X5}={X3,X4}

Находим минимальное расстояние каждой из этих точек: I(X3)=min[43,24\*+4]=28,

I(X4)=min[∞,24\*+9]=33, min[I(X3), I(X4)]=min[28, 33]=28,

X3: I(X3)=28\*, p=28, рядом с точкой Х3 поставим расстояние 28. Г{X3}={X4}

Находим минимальное расстояние до этой точки: I(X4)=min[33,28\*+15]=33,

X4: I(X4)=33\*, p=33, рядом с точкой Х4 поставим расстояние 33.

23+ 28+

Х2 20 Х3

23

1

4

15

0+

Х1 36

Х5 9

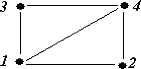
24+

Х4 33+

Запишем ответ в виде таблицы кратчайших расстояний от точки Х1 до всех остальных точек графа.

|  |  |
| --- | --- |
| Кратчайший путь | значение |
| Х1-Х2 | 23 |
| Х1-Х2-Х5-Х3 | 28 |
| Х1-Х2-Х5-Х4 | 33 |
| Х1-Х2-Х5 | 24 |

### Задания для самостоятельной

**Задача 1.** Составить матрицы инцидентности и смежности для графа:

**Задача 2.** На представленном графе найдите: а) минимальный остов дерева, б) найдите кратчайший путь от начальной точки Х1 до всех остальных точек.

Х2 17 Х5

Х1 6 Х3 8 Х4 19 Х6

13

11

14

5